学校编码: 10384　　　　分类号 ______ 密级 ______
学　　号: x2006170005　　　　UDC ________________

# 硕 士 学 位 论 文

# 一类阶化平移 Toroidal 李代数的 Wakimoto 模

# Wakimoto modules for a class of gradation shifting toroidal Lie algebras

兰 德 新

指 导 教 师: 谭绍滨 教 授
专 业 名 称: 基础数学

论文提交日期: 2009 年 10 月
论文答辩日期: 　　年　　月
学位授予日期: 　　年　　月

答辩委员会主席: ____________
评　　阅　　人: ____________

2009年　月

# 厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（　　　　　　　　）课题（组）的研究成果，获得（　　　　　　　　）课题（组）经费或实验室的资助，在（　　　　　　　　）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

# 厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（ ）1. 经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于 年 月 日解密，解密后适用上述授权。

（ ）2. 不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打"√"或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年 月 日

# 目 录

# Contents

# 摘 要


阶化平移 toroidal 李代数 $\mathcal{L}_n(t^{s_1},\cdots,t^{s_n})$ 是 toroidal 李代数的推广，它们以 $\nu$ 维环面 $\mathcal{A}=\mathbb{C}[t_1^{\pm 1},\cdots,t_\nu^{\pm 1}]$ 为坐标代数。设 $\mathcal{A}=\mathcal{A}_\nu:=\mathbb{C}[t_1^{\pm 1},\cdots,t_\nu^{\pm 1}]$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的 $\nu$ 个变量的交换罗朗多项式环，$so(n,\mathbb{C})$ 是 $n(\geq 3)$ 阶复正交李代数，即所有的 $n$ 阶反对称矩阵的集合。固定 $\mathcal{A}$ 中的 $n$ 个元素 $E_1,E_2\cdots E_n\in\mathcal{A}$。在张量空间 $so(n,\mathbb{C})\otimes\mathcal{A}$ 上定义双线性运算：

$$[\alpha_{ij}\otimes f,\alpha_{jk}\otimes g]=\alpha_{ik}\otimes E_j fg,$$
$$[\alpha_{ij}\otimes f,\alpha_{ij}\otimes g]=[\alpha_{ij}\otimes f,\alpha_{kl}\otimes g]=0.$$

这里 $f,g\in\mathcal{A},1\leq i,j,k,l\leq n$ 是互不相同的整数,

$$\{\alpha_{ij}:=e_{ij}-e_{ji}\mid 1\leq i\leq j\leq n\},$$

其中 $1\leq i\neq j\leq n,e_{ij}$ 为 $(i,j)$ 位置是 1，其他位置是 0 的 n 阶矩阵，且对互不相同的整数 $1\leq i,j,k,l\leq n$，李运算为

$$[\alpha_{ij},\alpha_{jk}]=\alpha_{ik},\quad [\alpha_{ij},\alpha_{kl}]=0.$$

如上定义的 $(so(n,\mathbb{C})\otimes\mathcal{A},\ [\cdot,\cdot])$ 是一个李代数，称之为阶化平移 toroidal 李代数，记为 $\mathcal{L}_n(E_1,\cdots,E_n)$。

在文 [2] 中，当 $n=2$ 时给出阶化平移 toroidal 李代数 $\mathcal{L}(t_1,t_2,1)$ 的一类顶点算子表示，在文 [1] 中作者又构造了 $\mathcal{L}(t_1,t_2,1)$ 的一类 Wakimoto 模。本学位论文第一章第二节就 $n=4$ 时研究含两个变量的阶化平移 toroidal 李代数 $\mathcal{L}_4(t_1,t_2,t_1t_2,1)$ 的结构，在第三节利用 Wakimoto 自由场方法给出一类顶点算子表示 $(W,\pi)$。在第四节研究 Wakimoto 模 V 的结构及其不可约性。


**关键词:** Toroidal 李代数，顶点算子，Wakimoto 模。

# Abstract


Gradation shifting toroidal Lie algebra $\mathcal{L}_n(t^{s_1}, \cdots, t^{s_n})$ is a generalization of toroidal Lie algebra coordinated by $\nu$-torus $\mathcal{A} = \mathbb{C}[t_1^{\pm1}, \cdots, t_\nu^{\pm1}]$. Let $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\nu := \mathbb{C}[t_1^{\pm1}, \cdots, t_\nu^{\pm1}]$ be the $\nu$ variable commutative ring of Laurent polynomials over the complex field $\mathbb{C}$. $so(n, \mathbb{C})$ is order $n(\geq 3)$ complex orthogonal Lie algebra, i.e., the set of all $n \times n$ antisymmetric matrices。Let $E_1, E_2, \cdots, E_n \in \mathcal{A}$ be fixed in $\mathcal{A}$, we define the bilinear operation over the tensor space $so(n, \mathbb{C}) \otimes \mathcal{A}$ :

$$[\alpha_{ij} \otimes f, \alpha_{jk} \otimes g] = \alpha_{ik} \otimes E_j f g,$$

$$[\alpha_{ij} \otimes f, \alpha_{ij} \otimes g] = [\alpha_{ij} \otimes f, \alpha_{kl} \otimes g] = 0,$$

where,$f, g \in \mathcal{A}, 1 \leq i, j, k, l \leq n$ are distinct integers,

$$\{\alpha_{ij} := e_{ij} - e_{ji} \mid 1 \leq i \leq j \leq n\},$$

where $1 \leq i \neq j \leq n$, $e_{ij}$ is the $n \times n$ matrit (having 1 in the $(i, j)$-entry and 0 elsewhere ), and for the distinct integers $1 \leq i, j, k, l \leq n$, the Lie bracket is

$$[\alpha_{ij}, \alpha_{jk}] = \alpha_{ik}, \quad [\alpha_{ij}, \alpha_{kl}] = 0.$$

Then $(so(n, \mathbb{C}) \otimes \mathcal{A},\ [\cdot, \cdot])$ is a Lie algebra, which is called the gradation shifting toroidal Lie algebra, denoted by $\mathcal{L}_n(E_1, \cdots, E_n)$.

In [2], when $n = 2$, a vertex operator representation of the gradation shifting toroidal Lie algebra $\mathcal{L}(t_1, t_2, 1)$ is given. In [1], the author constructed a class of Wakimoto modules of $\mathcal{L}(t_1, t_2, 1)$. In Section 2 of Chapter 1 of the paper, we stady the structure of gradation shifting toroidal Lie algebra $\mathcal{L}_4(t_1, t_2, t_1t_2, 1)$ with two variable. In Section 3, we use the method of Wakimoto free field to get a vertex operator representation $(W, \pi)$. In Section 4, we stady the structure of Wakimoto module $V$ and its irreduciblity.

**Keywords:** Toroidal Lie algebra, vertex operator, Wakimoto module.

# 引言

李群和李代数的理论起始于 19 世纪末，李代数最初是作为研究李群的代数工具由挪威数学家 M.S.Lie 将微积分与群论结合而引进的。M.S.Lie 在李群结构理论上的一个重大成就在于建立了无穷小变换的概念，借助于李群的可微性，使李群理论趋于线性化，得到一种”无穷小群“的结构。这种结构后来就被称为李代数。H.Weyl 在 1934 年正式引用”李代数“这一术语，并指出了李代数具有独立的研究价值，随后数学的发展已证实了他的远见。李代数的经典理论的重要性主要在于它对李群的应用。

李代数的研究是近代代数学中一个蓬勃发展的领域，它已成为一个独立的数学分支，而不仅仅作为研究李群的工具。二十世纪，几乎所有的数学学科都和李群及李代数发生关系，李代数成为线性代数中许多极好而又困难的问题的来源。1968 年 V.G.Kac 和 R.V.Moody 各自独立引入 Kac-Moody 代数以来，李代数及其表示理论的研究就进入到一个新的阶段，研究结果也层出不穷。由于被发现在数论，组合以及数学物理等各个领域有着广泛应用，Kac-Moody 代数吸引着众多数学家和物理学家去关注和研究。到现在为止，大家的研究主要集中在仿射李代数，量子仿射李代数，广义仿射李代数，李超代数和它们的表示理论以及在共形场理论，可积和无序系统中的应用。

李代数的表示理论在李代数的结构理论和在物理学的大部分应用中起着重要作用。由于在数学和数学物理上的广泛应用，无穷维李代数和量子化包络代数的表示理论构成了目前研究的一个重要领域。事实上，这些应用中的许多都涉及到仿射李代数和量子仿射李代数的表示理论。仿射李代数各种一般化的研究早在上个世纪八十年代就开始了，但是这些年来这方面的研究步伐尤其加快了。吸引着物理学家和数学家注意的 toroidal 李代数及其量子化就是一个很好的例子。关于 toroidal 李代数的结构理论和表示理论已有很多 ([11],[14],[16],[5],[24])，toroidal 李代数包含在一个更大的广义仿射李代数中。广义仿射李代数在可积系统中的应用已经开始研究，相关的表示理论也已被涉及。

[25] 指出如何通过顶点代数给出某些 toroidal 李代数的一类不可约模的实现。他们发现这些实现非常象仿射 Kac-Moody 李代数的情形。而顶点算子在仿射 Kac-Moody 李代数表示理论的研究中具有重要的地位。事实上，这种顶点算子代数与仿

射 Kac-Moody 李代数之间的联系已经成为推动这些代数的表示理论和顶点算子代数理论发展的强大动力。toroidal 李代数是仿射代数的多变量一般化，因此考虑与它们的表示理论有关的顶点算子代数是很自然的。而 [23] 给出了罗朗多项式上迹为零的 $2\times 2$ 矩阵构成的李代数的泛中心扩张，即 toroidal 代数的两种自由场实现。其中一种实现一般性地给出了虚 Verma 模 ([22]) 的实现，而另一种则给出了 Wakimoto 型模的实现。

顶点算子代数理论是仿射李代数及其表示的进一步发展。共形场理论在凝聚态物理和弦理论中有着重要的地位，而顶点算子代数和共形场理论有着很深的联系。不同领域的数学家现在研究这些理论时把它们作为很自然的数学结构。而格顶点算子代数是顶点算子代数中重要且基本的一类代数，它已经被从不同的角度广泛的研究。[19] 研究了与 toroidal 李代数 ([12],[13],[25],[20]) 表示理论有关的所谓“半格”顶点代数 V 的表示理论。而阶化平移 toroidal 李代数是 toroidal 李代数的推广。

设 $so(n,\mathbb{C})$ 是 $n(\geq 3)$ 阶复正交李代数，即所有的 $n$ 阶反对称矩阵的集合。取它的一组基

$$\{\alpha_{ij} := e_{ij} - e_{ji} \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}$$

其中 $1 \leq i \neq j \leq n, e_{ij}$ 为 $(i,j)$ 位置是 1，其他位置是 0 的 n 阶矩阵。显然有 $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$, 且对互不相同的整数 $1 \leq i,j,k,l \leq n$，李运算为

$$[\alpha_{ij}, \alpha_{jk}] = \alpha_{ik} \quad [\alpha_{ij}, \alpha_{kl}] = 0.$$

我们知道（见孟道骥 $\ll$ 复半单李代数引论 $\gg$ 第 17 页），当 $n = 3,4,6$ 时，$so(n,\mathbb{C})$ 分别是 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3$ 型有限维复半单李代数；当 $n \geq 5$ 是奇数时，$so(n,\mathbb{C})$ 是 $B_{\frac{n-1}{2}}$ 型有限维复半单李代数，当 $n > 6$ 是偶数时，$so(n,\mathbb{C})$ 是 $D_{\frac{n}{2}}$ 型有限维复半单李代数。

设 $\mathcal{A}$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上任意一个带单位元的交换结合代数。固定 $\mathcal{A}$ 中的 $n$ 个元素 $E_1, E_2, \cdots, E_n \in \mathcal{A}$。在张量空间 $so(n,\mathbb{C}) \otimes \mathcal{A}$ 上定义双线性运算：

$$[\alpha_{ij} \otimes f, \alpha_{jk} \otimes g] = \alpha_{ik} \otimes E_j fg,$$
$$[\alpha_{ij} \otimes f, \alpha_{ij} \otimes g] = [\alpha_{ij} \otimes f, \alpha_{kl} \otimes g] = 0,$$

其中 $f, g \in \mathcal{A}, 1 \leq i,j,k,l \leq n$ 是互不相同的整数。如上定义的 $(so(n,\mathbb{C}) \otimes \mathcal{A},\ [\cdot,\cdot])$ 是一个李代数，称之为阶化平移 toroidal 李代数。

当 $n=3$ 时。[2] 证明了任一完全的阶化平移 toroidal 李代数 $\mathcal{L}_3(E_1,E_2,E_3)$ 要么同构于多元 loop 代数 $\mathcal{L}_3(1,1,1)$ 要么同构于 $\mathcal{L}_3(t^{s_1},t^{s_2},1)$，特别的，当 $n=3,\nu=2$ 时，阶化平移 toroidal 李代数在同构得意义下只有 $\mathcal{L}_3(1,1,1)$ 和 $\mathcal{L}_3(t_1,t_2,1)$。文章 [3] 和 [4] 利用 Wakimoto 自由场方法给出 TKK 李代数 $\mathcal{G}(\mathcal{T}(S))$ 的一类顶点算子表示。[2] 在他们的文章中也给出阶化平移 toroidal 李代数 $\mathcal{L}(t_1,t_2,1)$ 的一类顶点算子表示，紧接着在 [1] 中，作者又构造了 $\mathcal{L}(t_1,t_2,1)$ 的一类 Wakimoto 模。

在本文第一章，我们考虑 $n=4$ 时含两个变量的阶化平移 toroidal 李代数 $\mathcal{L}_4(t_1,t_2,t_1 \cdot t_2,1)$ ，给出它的结构，并利用 Wakimoto 自由场方法给出阶化平移 toroidal 李代数 $\mathcal{L}_4(t_1,t_2,t_1t_2,1)$ 的一类顶点表示和 Wakimoto 模 V 的结构及其不可约性。

# 第一章 一类阶化平移 Toroidal 李代数的 Wakimoto 模

近年来, toroidal 李代数和量子环面李代数的表示受到广泛的研究。有许多表示在构造上使用了 Wakimoto 自由场的方法。在这一章，我们利用 Wakimoto 自由场的方法构造阶化平移 toroidal 李代数 $\mathcal{L}_4(t_1,t_2,t_1t_2,1)$ 的表示。

第一节，我们给出阶化平移 toroidal 李代数的定义。

第二节，我们给出阶化平移 toroidal 李代数 $\mathcal{L}_4(t_1,t_2,t_1t_2,1)$ 的结构。

第三节, 我们利用 Wakimoto 自由场的方法构造阶化平移 toroidal 李代数 $\mathcal{L}_4(t_1,t_2,t_1t_2,1)$ 的一类顶点表示。

第四节，我们给出 Fock 空间的结构及 V 的不可约表示 $(V,\pi)$。

## §1.1 阶化平移的 toroidal 李代数

设 $so(n,\mathbb{C})$ 是 $n(\geq 3)$ 阶复正交李代数，即所有的 $n$ 阶反对称矩阵的集合。取它的一组基

$$\{\alpha_{ij} := e_{ij} - e_{ji} \mid 1 \leq i \leq j \leq n\},$$

其中 $1 \leq i \neq j \leq n, e_{ij}$ 为 $(i,j)$ 位置是 1，其他位置是 0 的 n 阶矩阵。显然有 $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$，且对互不相同的整数 $1 \leq i,j,k,l \leq n$，李运算为

$$[\alpha_{ij},\alpha_{jk}] = \alpha_{ik} \quad [\alpha_{ij},\alpha_{kl}] = 0. \tag{1}$$

我们知道 (见孟道骥 $\ll$ 复半单李代数引论 $\gg$ 第 17 页)，当 $n = 3,4,6$ 时，$so(n,\mathbb{C})$ 分别是 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3$ 型有限维复半单李代数；当 $n \geq 5$ 是奇数时，$so(n,\mathbb{C})$ 是 $B_{\frac{n-1}{2}}$ 型有限维复半单李代数，当 $n > 6$ 是偶数时，$so(n,\mathbb{C})$ 是 $D_{\frac{n}{2}}$ 型有限维复半单李代数。

设 $\mathcal{A}$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上任意一个带单位元的交换结合代数。固定 $\mathcal{A}$ 中的 $n$ 个元素 $E_1,E_2,\cdots,E_n \in \mathcal{A}$。在张量空间 $so(n,\mathbb{C}) \otimes \mathcal{A}$ 上定义双线性运算：

$$\begin{aligned}
&[\alpha_{ij}\otimes f, \alpha_{jk}\otimes g] = \alpha_{ik}\otimes E_j fg, \\
&[\alpha_{ij}\otimes f, \alpha_{ij}\otimes g] = [\alpha_{ij}\otimes f, \alpha_{kl}\otimes g] = 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

其中 $f,g \in \mathcal{A}, \ \ 1 \leq i,j,k,l \leq n$ 是互不相同的整数。

**引理 1.1.1** 如上定义的 $(so(n,\mathbb{C})\otimes\mathcal{A},\ [\cdot,\cdot])$ 是一个李代数，称之为阶化平移 *toroidal* 李代数，记为 $\mathcal{L}_n(E_1,\cdots,E_n)$，在不引起混淆的情况下也简记为 $\mathcal{L}_n$

文章 [2] 中定义的无穷维李代数是 $n=3$ 的情形。特别地，我们选取 $\mathcal{A}$ 为 $\nu$ 个交换变量的 Laurent 多项式代数 $\mathcal{A}_\nu=\mathbb{C}[t_1^{\pm1},\cdots,t_\nu^{\pm1}]$，并且总假设元素 $E_1,\cdots E_n$ 都是 $\mathcal{A}_\nu$ 中的可逆元。此时，

$$\mathcal{L}_n=\sum_{1\le i<j\le n,\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^\nu}\mathbb{C}\alpha_{ij}\otimes t^{\mathbf{m}}.$$

显然，$\{\alpha_{ij}\otimes t^{\mathbf{m}}|\ 1\le i<j\le n,m\in\mathbb{Z}^\nu\}$ 构成 $\mathcal{L}_n$ 的一组基。记

$$\mathbb{Z}_2^\nu:=\{(s_1,s_2,\cdots,s_\nu)\in\mathbb{Z}^\nu|\ s_j=0,1;j=1,\cdots,\nu\}$$

**引理 1.1.2** 如果 $E_1,\cdots,E_n$ 都是 $\mathcal{A}$ 中的单位，则存在 $s_1,\cdots,s_n\in\mathbb{Z}_2^\nu$，使得 $\mathcal{L}_n(E_1,\cdots,E_n)$ 同构于 $\mathcal{L}_n(t^{s_1},\cdots,t^{s_n})$。进一步，我们总可以要求 $s_n=0$。

**引理 1.1.3** 李代数 $\mathcal{L}_4(t_1,t_2,t_1t_2,1)$ 是有限生成的。

**注** 当 $n=3$ 时。文章 [2] 证明了任一完全的阶化平移 toroidal 李代数 $\mathcal{L}_3(E_1,E_2,E_3)$ 要么同构于多元 loop 代数 $\mathcal{L}_3(1,1,1)$ 要么同构于 $\mathcal{L}_3(t^{s_1},t^{s_2},1)$，其中 $s_1,s_2$ 是 $\mathbb{Z}_2^\nu$ 中两个不相同的非零向量。特别的，当 $n=3,\nu=2$ 时，阶化平移 toroidal 李代数在同构得意义下只有 $\mathcal{L}_3(1,1,1)$ 和 $\mathcal{L}_3(t_1,t_2,1)$。文章 [6] 和 [7] 利用 Wakimoto 自由场方法给出 TKK 李代数 $\mathcal{G}(\mathcal{T}(S))$ 的一类顶点算子表示。[2] 在他们的文章中也给出阶化平移 toroidal 李代数 $\mathcal{L}(t_1,t_2,1)$ 的一类顶点算子表示，紧接着在 [1] 中，作者又构造了 $\mathcal{L}(t_1,t_2,1)$ 的一类 Wakimoto 模。本文就 $n=4$ 时给出含两个变量的阶化平移 Toroidal 李代数 $\mathcal{L}_4(t_1,t_2,t_1t_2,1)$ 的结构，并给出一类顶点算子表示和 Wakimoto- 模 V 的结构及其不可约性。

## §1.2　代数 $\mathcal{L}_4(t_1,t_2,t_1t_2,1)$ 的结构

记 $\mathcal{L}=\mathcal{L}_4(t_1,t_2,t_1^{-1}t_2^{-1},1)$，$t^{\mathbf{m}}=t_1^{m_1}t_2^{m_2}$，$\forall\mathbf{m}=m_1e_1+m_2e_2\in\mathbb{Z}^2$，事实上由引理 1.1.2 我们有如下结论：

**命题 1.2.1** $\mathcal{L}_4(t_1,t_2,t_1^{-1}t_2^{-1},1)\simeq\mathcal{L}_4(t_1,t_2,t_1t_2,1)$。

这样在同构意义下我们只要考虑代数 $\mathcal{L}_4(t_1,t_2,t_1^{-1}t_2^{-1},1)$ 的结构。实际上，阶化平移 toroidal 李代数 $\mathcal{L}$ 还和 TKK 代数有关。在 TKK 代数的定义中，取 $\nu=2$，设单位向量 $e_1=(1,0),e_2=(0,1)\in\mathbb{Z}^2$。则有 $S=S_0\bigcup S_1\bigcup S_2\bigcup S_3$，其中 $S_0=2\mathbb{Z}^2,S_1=S_0+e_1,S_2=S_0+e_2,S_3=S_0+e_1+e_2$。对于半格 S，TKK 代数 $\mathcal{G}(\mathcal{J}(S))$ 包含一个子代数

$$\mathcal{T}:=span\{h\otimes x^{\sigma_i},[L_{x^{\sigma_i}},L_{x^{\sigma_j}}]|\sigma_i\in S_i,\sigma_j\in S_j,1\le i\ne j\le 3\},\tag{3}$$

其中李运算为：

$$[h\otimes x^{\sigma_i},h\otimes x^{\sigma_j}]=4[L_{x^{\sigma_i}},L_{x^{\sigma_j}}],$$

$$[[L_{x^{\sigma_i}},L_{x^{\sigma_j}}],h\otimes x^{\sigma_k}]=\delta_{jk}h\otimes x^{\sigma_i+\sigma_j+\sigma_k}-\delta_{ik}h\otimes x^{\sigma_i+\sigma_j+\sigma_k},$$

$$[[L_{x^{\sigma_i}},L_{x^{\sigma_j}}],[L_{x^{\sigma_k}},L_{x^{\sigma_l}}]]=(\delta_{jk}-\delta_{ik})[L_{x^{\sigma_i+\sigma_j+\sigma_k}},L_{x^{\sigma_l}}]+(\delta_{il}-\delta_{jl})[L_{x^{\sigma_i+\sigma_j+\sigma_l}},L_{x^{\sigma_k}}].$$

**引理 1.2.2** 阶化平移 *toroidal* 李代数 $\mathcal{L}_4(t_1,t_2,t_1t_2,1)$ 同构于 $\mathcal{T}$。

**证明:** 如下线性扩充的定义 $\mathcal{L}_4(t_1,t_2,t_1t_2,1)$ 到 $\mathcal{T}$ 的线性映射 $\varphi$:

$$\alpha_{4i}\otimes t^m\mapsto\frac{\sqrt{-1}}{2}h\otimes x^{e_i+2m},\ 1\le i\le 3,$$

$$\alpha_{ij}\otimes t^m\mapsto[L_{x^{e_i}},L_{x^{e_j+2m}}],\ 1\le i\ne j\le 3.$$

容易验证 $\varphi$ 是一个向量空间的同构。下面证明是李同态。事实上，对任意互不相同 $1\le i,j,k\le 3$ 和 $m,n\in\mathbb{Z}^2$，有

$$\varphi[\alpha_{4i}\otimes t^m,\alpha_{4j}\otimes t^n]=\varphi(-\alpha_{ij}\otimes t^{m+n})=-[L_{x^{e_i}},L_{x^{e_j+2(m+n)}}],$$

$$[\varphi(\alpha_{4i}\otimes t^m),\varphi(\alpha_{4j}\otimes t^n)]=-\frac{1}{4}[h\otimes x^{e_i+2m},h\otimes x^{e_j+2n}]=-[L_{x^{e_i+2m}},L_{x^{e_j+2n}}].$$

二者相等。进一步，有

$$\varphi[\alpha_{ij}\otimes t^m,\alpha_{4j}\otimes t^n]=\varphi(\alpha_{4i}\otimes t^{e_j+m+n})=\frac{\sqrt{-1}}{2}h\otimes x^{e_i+2(e_j+m+n)},$$

$$[\varphi(\alpha_{ij}\otimes t^m),\varphi(\alpha_{4j}\otimes t^n)]=[[L_{x^{e_i}},L_{x^{e_j+2m}}],\frac{\sqrt{-1}}{2}h\otimes x^{e_j+2n}]=\frac{\sqrt{-1}}{2}h\otimes x^{e_i+2(e_j+m+n)}.$$

最后，有

$$\varphi[\alpha_{ij}\otimes t^m,\alpha_{jk}\otimes t^n]=\varphi(\alpha_{ik}\otimes t^{e_j+m+n})=[L_{x^{e_i}},L_{x^{e_k+2(e_j+m+n)}}],$$

$$[\varphi(\alpha_{ij}\otimes t^m),\varphi(\alpha_{jk}\otimes t^n)]=[[L_{x^{e_i}},L_{x^{e_j+2m}}],[L_{x^{e_j}},L_{x^{e_k+2n}}]]=[L_{x^{e_i+2(e_j+m)}},L_{x^{e_k+2n}}].$$

二者相等。其他情形是显然的。所以 $\varphi$ 是李同构。阶化平移 toroidal 李代数 $\mathcal{L}_4(t_1,t_2,t_1t_2,1)$ 同构于 $\mathcal{T}$。

我们定义李代数 $\mathcal{L}$ 的分次

$$\begin{aligned}&deg(\alpha_{41}\otimes t^{\mathbf{m}})=\mathbf{m}+\tfrac{1}{2}e_1,\quad deg(\alpha_{42}\otimes t^{\mathbf{m}})=\mathbf{m}+\tfrac{1}{2}e_2,\\&deg(\alpha_{43}\otimes t^{\mathbf{m}})=\mathbf{m}-\tfrac{1}{2}(e_1+e_2),\quad deg(\alpha_{12}\otimes t^{\mathbf{m}})=\mathbf{m}+\tfrac{1}{2}(e_1+e_2),\\&deg(\alpha_{13}\otimes t^{\mathbf{m}})=\mathbf{m}-\tfrac{1}{2}e_2,\quad deg(\alpha_{23}\otimes t^{\mathbf{m}})=\mathbf{m}-\tfrac{1}{2}e_1.\end{aligned}\tag{4}$$

从而由 (2) 和 (4) 式我们得到如下命题

**命题 1.2.3** 李代数 $\mathcal{L}=\bigoplus\limits_{m\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}^2}(\mathbb{C}\alpha(\boldsymbol{m})+\mathbb{C}\beta(\boldsymbol{m}))$ 是 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}^2$- 阶化李代数，其中

$$\alpha(\mathbf{m})=\begin{cases}\sqrt{-1}\alpha_{41}\otimes t^{\mathbf{m}-\frac{1}{2}e_1}, & \text{如果 } \mathbf{m}\in\mathbb{Z}^2+\frac{1}{2}e_1,\\ \sqrt{-1}\alpha_{42}\otimes t^{\mathbf{m}-\frac{1}{2}e_2}, & \text{如果 } \mathbf{m}\in\mathbb{Z}^2+\frac{1}{2}e_2,\\ \alpha_{43}\otimes t^{\mathbf{m}+\frac{1}{2}(e_1+e_2)}, & \text{如果 } \mathbf{m}\in\mathbb{Z}^2-\frac{1}{2}(e_1+e_2),\\ 0, & \text{如果 } \mathbf{m}\in\mathbb{Z}^2.\end{cases}$$

$$\beta(\mathbf{m})=\begin{cases}\alpha_{12}\otimes t^{\mathbf{m}-\frac{1}{2}(e_1+e_2)}, & \text{如果 } \mathbf{m}\in\mathbb{Z}^2+\frac{1}{2}(e_1+e_2),\\ -\sqrt{-1}\alpha_{13}\otimes t^{\mathbf{m}+\frac{1}{2}e_2}, & \text{如果 } \mathbf{m}\in\mathbb{Z}^2-\frac{1}{2}e_2,\\ \sqrt{-1}\alpha_{23}\otimes t^{\mathbf{m}+\frac{1}{2}e_1}, & \text{如果 } \mathbf{m}\in\mathbb{Z}^2-\frac{1}{2}e_1,\\ 0, & \text{如果 } \mathbf{m}\in\mathbb{Z}^2.\end{cases}$$

其李运算满足如下关系

$$\begin{aligned}&[\alpha(\mathbf{m}),\alpha(\mathbf{n})]=\Omega_i(2\mathbf{n})\beta(\mathbf{m}+\mathbf{n}),\quad 2\mathbf{m}\in S_i, i=1,2,3,\quad 2\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2,\\&[\alpha(\mathbf{m}),\beta(\mathbf{n})]=\Omega_i(2\mathbf{n})\alpha(\mathbf{m}+\mathbf{n}),\quad 2\mathbf{m}\in S_i, i=1,2,3,\quad 2\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2,\\&[\beta(\mathbf{m}),\beta(\mathbf{n})]=\Omega_i(2\mathbf{n})\beta(\mathbf{m}+\mathbf{n}),\quad 2\mathbf{m}\in S_i, i=1,2,3,\quad 2\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2,\end{aligned}\tag{5}$$

其中

$$\Omega_1(2\mathbf{n})=\begin{cases}0, & \text{如果 } 2\mathbf{n}\in S_0\bigcup S_1,\\ 1, & \text{如果 } 2\mathbf{n}\in S_2\bigcup S_3,\end{cases}$$

$$\Omega_2(2\mathbf{n})=\begin{cases}0, & \text{如果 } 2\mathbf{n}\in S_0\bigcup S_2,\\ -1, & \text{如果 } 2\mathbf{n}\in S_1\bigcup S_3,\end{cases}$$

$$\Omega_3(2\mathbf{n}) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } 2\mathbf{n} \in S_0 \bigcup S_3, \\ -1, & \text{如果 } 2\mathbf{n} \in S_1, \\ 1, & \text{如果 } 2\mathbf{n} \in S_1. \end{cases}$$

## §1.3 阶化平移 toroidal 李代数的顶点算子表示

我们利用 Wakimoto 的自由场（见 [6], [7]）的思想构造阶化平移 toroidal 李代数的顶点算子表示。设 $W = \mathbb{C}[x(\sigma) |\ \sigma \in \mathbb{Z}^2\ ]$ 是一个关于无穷多个变量 $x(\sigma)$(交换) 的多项式代数，其上的算子 $x(\sigma)$ 和 $\frac{\partial}{\partial x(\sigma)}$ 分别表示通常的乘积算子和偏微分算子。

取定一族 2 阶下三角矩阵

$$X_\sigma = \begin{pmatrix} a(\sigma) & 0 \\ c(\sigma) & d(\sigma) \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C}),$$

其中 $\sigma \in \mathbb{Z}^2$, $a(\sigma)d(\sigma) = 1$。对 $\forall \sigma \in \mathbb{Z}^2$, 设

$$P(\sigma) = a(\sigma)\frac{\partial}{\partial x(\sigma)}, \quad Q(\sigma) = c(\sigma)\frac{\partial}{\partial x(\sigma)} + d(\sigma)x(\sigma).$$

对 $\forall \sigma, \tau \in \mathbb{Z}^2$，容易验算得

$$[P(\sigma), P(\tau)] = [Q(\sigma), Q(\tau)] = 0, \quad [P(\sigma), Q(\tau)] = \delta_{\sigma,\tau}.$$

**定理 1.3.1** *定义线性映射 $\pi$: $\mathcal{L} \mapsto EndW$ 是一个李同态，满足：*

$$\alpha(\boldsymbol{m}) \mapsto \begin{cases} \sum\limits_{\boldsymbol{r} \in S_0 \bigcup S_i} Q(\boldsymbol{r} + 2\boldsymbol{m})P(\boldsymbol{r}), & 2\boldsymbol{m} \in S_i, i = 1, 2, \\ \sum\limits_{\boldsymbol{r} \in S_0 \bigcup S_3} (-1)^{r_1} Q(\boldsymbol{r} + 2\boldsymbol{m})P(\boldsymbol{r}), & 2\boldsymbol{m} \in S_3, \end{cases} \tag{6}$$

$$\beta(\boldsymbol{n}) \mapsto \begin{cases} \sum\limits_{\boldsymbol{r} \in S_2 \bigcup S_3} Q(\boldsymbol{r} + 2\boldsymbol{n})P(\boldsymbol{r}), & 2\boldsymbol{n} \in S_1, \\ -\sum\limits_{\boldsymbol{r} \in S_1 \bigcup S_3} Q(\boldsymbol{r} + 2\boldsymbol{n})P(\boldsymbol{r}), & 2\boldsymbol{n} \in S_2, \\ \sum\limits_{\boldsymbol{r} \in S_1 \bigcup S_2} (-1)^{r_1} Q(\boldsymbol{r} + 2\boldsymbol{n})P(\boldsymbol{r}), & 2\boldsymbol{n} \in S_3, \end{cases} \tag{7}$$

*其中 $S_0 = 2\mathbb{Z}^2, S_1 = S_0 + e_1, S_2 = S_0 + e_2, S_3 = S_0 + e_1 + e_2$。即 Fock 空间 $W$ 通过 (6) - (7) 给出 $\mathcal{L}$ 的一个表示。*